Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation (4 points).
L'usage de la calculatrice est autorisé conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

PREMIÈRE PARTIE

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES (12 POINTS)

Exercice 1

Ecrire A sous la forme fractionnaire la plus simple possible : $A = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}(1 - \frac{1}{5})$

Ecrire B sous la forme a $\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers positifs et b le plus petit possible :
$B = \sqrt{98} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{8}$

Exercice 2

1/ Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2a + 3b = 66 \\ 4a + b = 82 \end{cases}$

2/ Dans un grand magasin, Loïc et Tania achètent des compact disques (CD) et des bandes dessinées (BD). Les CD valent tous le même prix et les BD valent toutes un même autre prix. Sachant que Loïc achète 2 CD et 3 BD pour 66 euros et que Tania achète 4 CD et une BD pour 82 euros, donner le prix d'un CD et celui d'une BD.

Exercice 3

On donne l'expression suivante : $D = (1 - 4x)(2x - 3) - (2x - 3)^2$

1/ Montrer que D peut s'écrire sous la forme développée et réduite suivante :
$D = -12x^2 + 26x - 12$

2/ Factoriser D

3/ Résoudre l'équation : $(2x - 3)(-6x + 4) = 0$

Exercice 4

Résoudre l'inéquation suivante puis, représenter <u>en rouge</u> les solutions sur une droite graduée :

$5(3x - 9,6) \leq 3(2 - 4x)$

COLLEGE MAX BRAMERIE DE LA FORCE		
Temps alloué : **2h**	Coefficient : **2**	**BREVET BLANC**
Epreuve : **Mathématiques**		Date : **18 mai 2005**
Ce sujet comporte : **3 pages**		Série collège : **1/3**

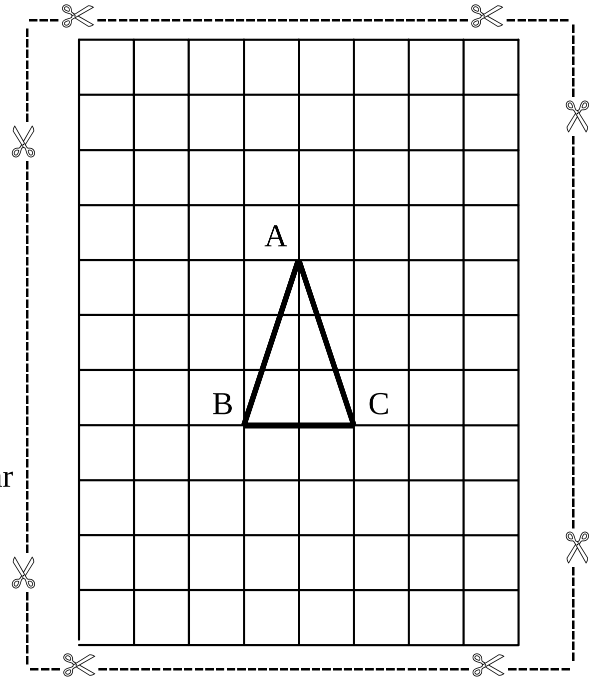
DEUXIÈME PARTIE

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES (12 POINTS)

Exercice 1

La figure ci-contre est à compléter au fur et à mesure de la résolution de l'exercice. Elle devra être découpée et collée sur la copie.

1/ Tracer le point E image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.
Quelle est la nature du quadrilatère ACBE ?
Justifier la réponse.

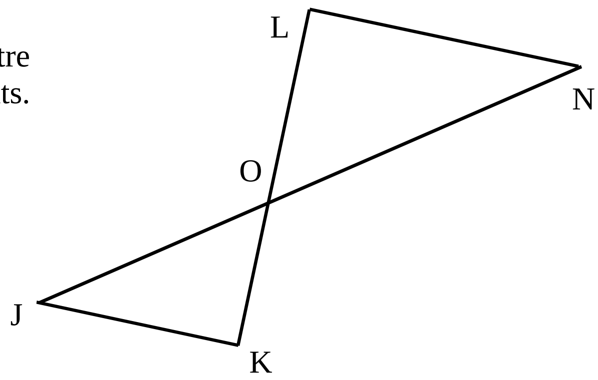


2/ Tracer le point D symétrique du point A par rapport à la droite (BC), puis le point K symétrique du point A par rapport au point B.
Indiquer, <u>sans justification</u>, une transformation par laquelle l'image du triangle ABC est le triangle BKD.

3/ Construire le point F tel que : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Préciser la nature du quadrilatère ABCF, puis déduire que A est le milieu du segment [EF]

Exercice 2

La figure ci-contre est donnée sans codage, à titre d'exemple pour préciser la disposition des points. Ce n'est pas une figure en vraie grandeur.



On donne :

Les droites (JN) et (KL) sont sécantes en O :
OK = 2 cm ; OL = 3,6 cm
OJ = 3 cm ; ON = 5,4 cm
Le triangle OKJ est rectangle en K.

1/ Calculer l'angle $\widehat{OJK}$ (on donnera l'arrondi au degré près).

2/ Démontrer que les droites (JK) et (LN) sont parallèles.

3/ Déduire de la question 2/ sans effectuer de calculs, que les angles $\widehat{OJK}$ et $\widehat{ONL}$ sont égaux.

TROISIÈME PARTIE

QUESTIONS ENCHAÎNÉES (12 POINTS)

NOM : .... **Prénom :** .... **Classe :** ....

La figure sera complétée *au fur et à mesure du problème* ***sur cette page*** *:*
Vous complèterez le cadre ci-dessus et remettrez cette feuille avec votre copie.
Vous placerez tous les ***points demandés*** *ainsi* ***que pointillés et flèches*** *utiles pour les lectures de coordonnées.*

Dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité le centimètre, on donne les points suivants :
A(-4 ; 3), B(-1 ; -1) et C(7 ; 5) placés sur la figure ci-dessous.

1/ Lire ou calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis montrer que AB = 5.

Pour la suite du problème, on admettra que BC = 10 et AC = $5\sqrt{5}$.

2/ Démontrer que le triangle ABC est rectangle en un sommet que l'on précisera.

3/ Calculer les coordonnées du milieu M de [AC] et le placer sur la figure.

4/ Démontrer que MB = MC.

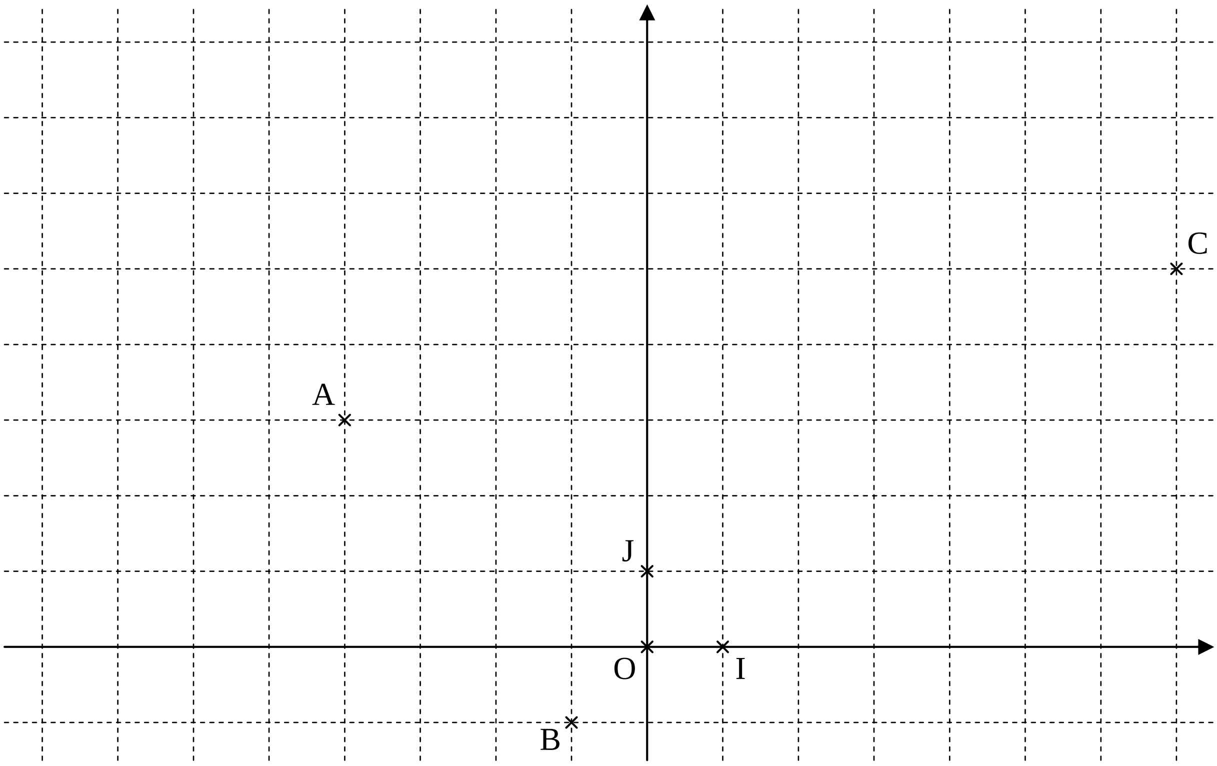
5/ Construire le point N, image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$; lire ses coordonnées.

6/ Calculer les coordonnées de N.

7/ Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont égaux.

8/ Démontrer que le quadrilatère BMCN est un losange.

9/ Question facultative : démontrer que le triangle ABC et le losange BMCN ont la même aire.



Exercice 1 (1,5 + 1,5) = (3 pts)

SOLUTION : ACTIVITÉS NUMÉRIQUES (12 POINTS)

$A = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{5}\right)$

$A = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\left(\frac{5}{5} - \frac{1}{5}\right)$

$A = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{4}{5}$

$A = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}$

$A = -\frac{2}{3}$

$B = \sqrt{98} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{8}$

$B = \sqrt{49 \times 2} - 2\sqrt{25 \times 2} + 3\sqrt{4 \times 2}$

$B = \sqrt{49} \times \sqrt{2} - 2 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} + 3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{2}$

$B = 7 \times \sqrt{2} - 2 \times 5 \times \sqrt{2} + 3 \times 2 \times \sqrt{2}$

$B = (7 - 10 + 6) \times \sqrt{2}$

$B = 3\sqrt{2}$

Exercice 2 (2 + 1) = (3 pts)

1 / $\begin{cases} 2a + 3b = 66 \\ 4a + b = 82 \end{cases}$

D'après la deuxième équation : $b = 82 - 4a$ (3)

En substituant b dans la première on déduit :

$2a + 3(82 - 4a) = 66$

$2a + 246 - 12a = 66$

$246 - 66 = 12a - 2a$

$180 = 10a$

$18 = a$

En substituant a dans l'équation (3) on déduit :

$b = 82 - 4 \times 18$

$b = 82 - 72$

$b = 10$

Vérification :

$2 \times 18 + 3 \times 10 = 36 + 30 = 66$

$4 \times 18 + 10 = 72 + 10 = 82$

La solution de ce système est (18 ; 10)

2 / On peut appeler « a » le prix en euros d'un compact disque et « b » celui d'une bande dessinée.

On obtient le système : $\begin{cases} 2a + 3b = 66 \\ 4a + b = 82 \end{cases}$ qui a été résolu à la question précédente.

Alors le prix d'un compact disque est 18 € et une bande dessinée coûte 10 €.

Exercice 3 (1,5 + 1,5 + 1) = (4pts)

1/ $D = (1 - 4x)(2x - 3) - (2x - 3)^2$

$D = (2x - 3 - 8x^2 + 12x) - (4x^2 - 12x + 9)$

$D = -8x^2 + 14x - 3 - 4x^2 + 12x - 9$

$D = -12x^2 + 26x - 12$

2/ $D = (1 - 4x)(2x - 3) - (2x - 3)(2x - 3)$

$D = (2x - 3)[(1 - 4x) - (2x - 3)]$

$D = (2x - 3)(1 - 4x - 2x + 3)$

$D = (2x - 3)(4 - 6x)$

3/ Le produit $(2x - 3)(-6x + 4)$ est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$2x - 3 = 0$ ou $-6x + 4 = 0$

$2x = 3$ ou $4 = 6x$

$x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Cette équation admet deux solutions $\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3}$

Exercice 4 (2 pts)

$5(3x - 9,6) \leq 3(2 - 4x)$

$15x - 48 \leq 6 - 12x$

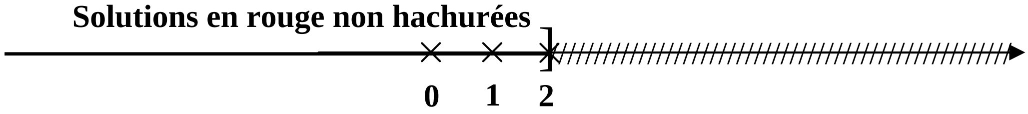
$15x + 12x \leq 6 + 48$

$27x \leq 54$

$x \leq \frac{54}{27}$ c'est-à-dire $x \leq 2$

Les solutions de cette inéquation sont les valeurs <u>inférieures ou égales</u> à 2 (non hachurées) :

Solutions en rouge non hachurées



SOLUTION : ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES (12 POINTS)

Exercice 1 (2 + 2 + 3,5) = (7,5 pts)

1/ E est l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{CB}$

donc E est construit (1 pt) tel que $\vec{CB} = \vec{AE}$.

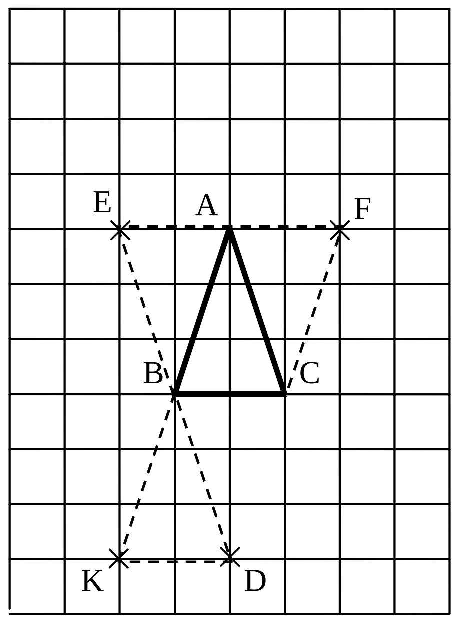
ACBE est un parallélogramme. (1 pt)

2/ D et K sont construits sur la figure. (1 pt)

Le triangle BKD est l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{AB}$. (1 pt)

3/ F est construit (1 pt) tel que $\vec{BF} = \vec{BA} + \vec{BC}$. Alors ABCF est un parallélogramme et $\vec{CB} = \vec{FA}$. (0,5 pt)

D'après 1/ $\vec{CB} = \vec{AE}$ et d'après 3/ $\vec{CB} = \vec{FA}$ donc on a $\vec{FA} = \vec{AE}$ ce qui signifie que A est le milieu du segment [EF] (2 pts)



Exercice 2 (1,5 + 2 + 1) = (4,5 pts)

Les droites (JN) et (KL) sont sécantes en O :
OK = 2 cm ; OL = 3,6 cm ; OJ = 3 cm ; ON = 5,4 cm
Le triangle OKJ est rectangle en K.

1/ Le triangle OKJ est rectangle en K alors on a :

Sin $\widehat{OJK} = \dfrac{OK}{OJ} = \dfrac{2}{3}$ donc avec la machine :

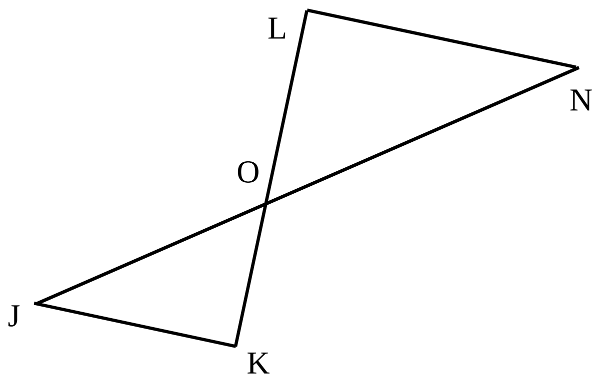
$\text{Sin}^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) = 41{,}810\,314\,89\ldots$ donc $\widehat{OJK} \approx 42°$ et

$\widehat{OJK} = 42°$ arrondi à 1° près. (1,5)

2/ D'une part $\dfrac{OJ}{ON} = \dfrac{3}{5{,}4}$ et d'autre part $\dfrac{OK}{OL} = \dfrac{2}{3{,}6}$

$3 \times 3{,}6 = 2 \times 5{,}4 = 10{,}8$ donc $\dfrac{OJ}{ON} = \dfrac{OK}{OL}$

Les points J,O et N sont alignés dans le même ordre que les points K, O et L.
D'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (JK) et (LN) sont parallèles. (2 pts)



3/ Les angles $\widehat{OJK}$ et $\widehat{ONL}$ sont alternes internes et déterminés par les deux droites <u>parallèles</u> (JK) et (LN) coupées par la sécante (LK) : ils ont la même mesure ; $\widehat{ONL} \approx 42°$ et

$\widehat{ONL} = 42°$ arrondi à 1° près. (1 pt)

<u>SOLUTION</u> : QUESTIONS ENCHAÎNÉES (12 POINTS)

<u>Les points A, B et C sont donnés.</u>
1/ En partant de A on compte **3 unités** d'abscisses **vers la droite (+3)** puis **4 unités** d'ordonnées **vers le bas (-4)** pour atteindre B ; <u>ou bien par calcul</u> :
$x_B - x_A = -1 - (-4) = -1 + 4 = 3$
$y_B - y_A = -1 - 3 = -4$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont (3 ; -4) (0,5 pt)

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$
$AB^2 = (-1 - (-4))^2 + (-1 - 3)^2$
$AB^2 = (-1 + 4)^2 + (-4)^2$
$AB^2 = 3^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$
$AB = \sqrt{25} = 5$ (cm) (1,5 pts)

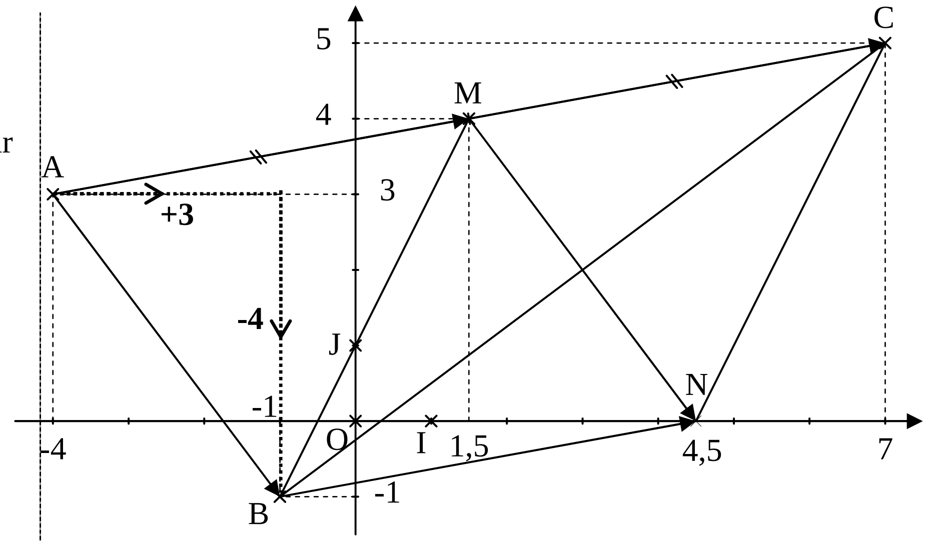
2/ On a : $AB^2 = 25$; $BC^2 = 10^2 = 100$ et $AC^2 = (5\sqrt{5})^2 = 25 \times 5 = 125$.
On constate que $125 = 100 + 25$
$AC^2 = BC^2 + AB^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore **le triangle ABC est rectangle en B**. (2 pts)

3/ Les coordonnées du milieu M du segment [AC] sont données par les égalités : $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-4 + 7}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

et $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{3 + 5}{2} = 4$
Les coordonnées du milieu M du segment [AC] sont (1,5 ; 4). (1 pt)
Le point M est placé sur la figure avec son codage. (0 pt)

4/ D'après la question 2/ le triangle ABC est rectangle en B.
Puisque le point M est le milieu de l'hypoténuse [AC], il est équidistant des trois sommets du triangle et **MB = MC**. (1,5 pt)

5/ Le point N image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est construit tel que **$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$**. (1 pt)
Ses coordonnées lues sur le graphique sont (4,5 ; 0) (0,5 pt)



6/ D'après la question 5/ on a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ et les cordonnées de ces vecteurs sont égales :

$x_N - x_M = x_B - x_A$	$y_N - y_M = y_B - y_A$
$x_N - 1{,}5 = -1 - (-4)$	$y_N - 4 = -1 - 3$
$x_N = -1 + 4 + 1{,}5 = 4{,}5$	$y_N = -1 - 3 + 4 = 0$
$x_N = 4{,}5$	$y_N = 0$

Ainsi **les coordonnées du point N sont (4,5 ; 0)**. (1 pt)

7/ Puisque M est le milieu de [AC] on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$.
Puisque $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$, le quadrilatère ABNM est un parallélogramme et on a aussi $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$
Ainsi **$\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont égaux**. (1,5 pt)

8/ D'après 7/ on sait $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MC}$, donc le quadrilatère BMCN est un <u>parallélogramme</u>.
D'après 4/ on sait MB = MC, donc BMCN est un parallélogramme ayant deux côtés <u>consécutifs</u> de même mesure : c'est **un losange**. (1,5 pt)

+ présentation = 0 à 4 pts

9/ Facultative : le calcul de chaque aire <u>n'est pas demandé</u> !
Puisque ABC est rectangle en B, on a $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{AB \times BC}{2}$

Puisque BMCN est un losange, on a $\mathcal{A}(BMCN) = \dfrac{MN \times BC}{2}$

Or d'après 6/ on a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$, donc MN = AB
et alors $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(BMCN)$

[$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(BMCN) = \dfrac{5 \times 10}{2}$ (cm²) = 25 (cm²)]